А.Г. Кислов

Пролиферация логических систем: эвристическая роль аксиоматического метода*

Наиболее очевидным и, тем не менее, шокирующим широкую философскую общественность следствием деуниверсализации классической логики явился стремительный рост многообразия логик**, но «несмотря на то, что современная ситуация характеризуется пролиферацией логических систем, дебаты по поводу логического плюрализма не утихают. И главную проблему в связи с этим составляет вопрос о том, являются ли эти логики соперничающими, или же они образуют одно огромное дружное семейство»***. Отсюда легко можно понять, что сами механизмы конструирования логик и различные классификации логических исчислений становятся актуальными объектами теоретического осмысления****. Именно с этой точки зрения предлагается взглянуть на эвристический потенциал аксиоматического построения логических систем.

I

Аксиоматический метод традиционно определяется***** как такой способ дедуктивного построения научной теории, когда её основу составляют лишь некоторые, принятые без доказательств, положения – аксиомы (постулаты), а все остальные положения теории (теоремы) выводятся (доказываются) из них путём рассуждений, *корректных относительно принимаемой этой теорией логики*. На последнее обстоятельство в дальнейшем и будет обращено наше внимание, сейчас же отметим, что кроме

* Материалы к спецкурсу: «Онто-гносеологические сюжеты в истории логики».

** Существует сайт «Логический плюрализм»: http://pluralism.pitas.com

*** Васюков В.Л. Последствия логического плюрализма: глобальный и локальный аспекты // Логические исследования. Вып 10. М., 2003. С. 24.

**** См., напр.: Карпенко А.С. Предмет логики в свете основных тенденций её развития // Логические исследования. Вып 11. М., 2004. С. 153.

***** См., напр.: Есенин-Вольпин А.С. Об аксиоматическом методе // Вопросы философии, 1959, №7; Садовский В.Н. Аксиоматический метод построения научного знания // Философские вопросы современной формальной логики. М., 1962. С. 215 – 262.

указанной в традиционном определении дедуктивной функции аксиоматического метода, существует другая важная его функция – эвристическая. Безусловно, эти функции взаимосвязаны, даже взаимообусловлены, но если значение дедуктивной функции отчётливо просматривается для зрелых теорий, обычно – как выполнение требований предельной научной строгости: «аксиоматический метод, собственно говоря, есть не что иное, как искусство составлять тексты, формализация которых легко достижима»*, то важность эвристической роли несомненна для становящихся теорий, так как посредством аксиоматического метода в пространство теоретического осмысления помещается принципиально новое, порой неожиданное, возможно даже парадоксальное с точки зрения пресловутого «здравого смысла» и устоявшихся научных представлений, содержание. По этой причине сторонниками аксиоматического метода были многие учёные, в своё время радикально изменившие облик науки, такие как И. Ньютон, Н.И. Лобачевский, Д. Гильберт, А. Эйнштейн, Н. Бор и др.

II

Совершим небольшой исторический экскурс с целью показать, что именно к аксиоматическому методу нередко обращаются для разрешения тех или иных трудностей и противоречий становящихся теорий. Традиционно начинают с «Начал» Евклида, которые с давних пор заняли место классического примера аксиоматического построения знания, впрочем, справедливость этого широко распространённого взгляда нередко обоснованно оспаривается**. Как бы то ни было, общие интенции Евклида вполне соответствуют эвристическим задачам аксиоматического метода***, ярко выраженное своеобразие «Начал» позволяет считать, что этот текст занимает некое промежуточное положение между дотеоретической геометрией, представляющей собой ряд догматически поданных правил и рекомендаций к построениям, и геометрией, оформленной строго аксиоматически. Существуют относительно достоверные историко-культурные гипотезы, объясняющие причины, побудившие древних греков обратиться к аксиоматизации геометрии. Согласно Ван дер Вардену****, к необходимости строгого теоретического построения геометрии привела потребность

* Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С. 24.

** Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М., 1962. С. 278 – 279.

*** Подробно о различии постулатов и аксиом «Начал» Евклида см.: Родин А.В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. М., 2003. С. 163 – 185.

**** Варден Ван дер. Пробуждающаяся наука. М., 1959. С. 124.

в уточнении знаний. Основанием этой потребности послужило параллельное заимствование древними греками математических достижений вавилонян и египтян, причём получаемые сведения далеко не во всём совпадали, например, известно, что площадь круга у вавилонян соответствовала $3\pi r^2$, а у египтян – $(8/9\pi 2r)^2$. Аксиоматический метод, таким образом, выступил в качестве своеобразного средства разрешения конфликта мнений. По другой, также затрагивающей ключевую для древнегреческой философии оппозицию «мнение – знание», а потому – вполне совместимой с предыдущей, версии (А. Сабо) аксиоматизация геометрии связана с реакцией на знаменитые апории Зенона Элейского, породившей стремление к точному, непротиворечивому употреблению таких понятий, как, например, «часть», «целое», «равное» в случае бесконечных множеств*. Обоснованность этих гипотез подтверждает вышеприведённый тезис об особом значении аксиоматического метода для преодоления трудностей становящейся теории, и таких подтверждений в истории науки встречается немало.

Показательным примером, демонстрирующим обсуждаемые эвристические возможности аксиоматического подхода, является то, что И. Ньютон, опираясь на «метод принципов» вместо распространённого тогда «метода гипотез», в своё время смог с высокой точностью описать оптические явления и явления тяготения, хотя и природу света, и природу тяготения нельзя считать полностью прояснёнными даже на сегодняшний день. Аксиомы какой-либо теории не требуют своего доказательства в рамках самой теории, а принимаются по внешним, порой лишь гипотетическим, причинам, что и позволяет даже в отсутствии полного знания о сущности явления давать его точное теоретическое описание.

Приведённые примеры, как и многие другие подобные им опыты построения теорий, не сопровождались высоким уровнем методологической рефлексии, сам аксиоматический метод не был ещё объектом теоретизирования. Переломным пунктом стало построение Н.И. Лобачевским «воображаемой» геометрии путём выделения в евклидовой геометрии четырёх аксиом так называемой абсолютной геометрии и присоединения к ним утверждения, противоположного пятому постулату Евклида о параллельных прямых. Интерпретация такой геометрии не претендовала на естественность и несомненную очевидность, но новая система аксиом была непротиворечивой и потому полноценной в умозрительном смысле. «Скандал» в теоретической геометрии, потерявшей «очарование очевидности», привёл к осознанию важности роли аксиоматического метода в науке и, в

* Близкая позиция изложена в: Стройк Д.Я. Краткий очерк математики. М., 1984. С. 64.

качестве следствия, спровоцировал более пристальное внимание к самому методу построения теорий.

Эволюция аксиоматического метода насчитывает три этапа, которые могут быть охарактеризованы как содержательная, формальная и формализованная аксиоматики*. Все рассмотренные выше теории относятся к содержательной аксиоматике, т.е. к теориям «относительно некоторой системы объектов, известной до формулировки теории; аксиомы и выводимые из них теоремы говорят нечто об объектах изучаемой системы и могут расцениваться как истинные или ложные»**. Переход к формальной, и далее — к формализованной аксиоматике, осуществлённый в первой половине XX в. с целью использовать аксиоматический метод для разрешения методологических и логических трудностей в вопросах оснований математики, связан с именем Д. Гильберта. Программа Гильберта предполагала такое построение математики, которое было бы лишено противоречий логицизма (Г. Фреге), не избежавшего теоретико-множественных парадоксов наивной теории множеств (известный парадокс Б. Рассела), и вместе с тем сохранило бы все достижения и методы классической математики, в отличие от интуиционистов (Л.Э.Я. Брауэр), отказавшихся от понятия «актуальная бесконечность» в пользу абстракции «потенциальной бесконечности» и, как следствие, от базирующихся на законе исключённого третьего опосредованных доказательств. Гильберт заявлял, что «все затронутые трудности могут быть преодолены и что можно придти к строгому и вполне удовлетворительному обоснованию числа и притом с помощью метода, который я называю аксиоматическим»***. Известны губительные для программы Гильберта методологические истолкования результатов К. Гёделя (невозможность финитными средствами решить проблему непротиворечивости арифметики, принципиальная неполнота достаточно богатых исчислений), известны и критика этих истолкований, и модификации программы Гильберта****. Однако обсуждение столь важной для логики и методологии науки проблемы не входит в задачи статьи, здесь нас будет интересовать

* См. об этом, напр., в указанных работах А.С. Есенина-Вольпина, В.А. Смирнова и В.Н. Садовского.

** Смирнов В.А. Указ. соч. С. 265.

*** Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948. С. 324.

**** См., напр.: Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Введение в логику и методологию наук. М., 1994. С. 208-238; Самохвалов К.Ф. Программа Гильберта и теорема Гёделя // Методологические проблемы математики. Новосибирск, 1979. С. 65 – 76; Он же. Уточнения обычной интерпретации теорем Гёделя о неполноте и понятие рекурсивной перечислимости // Проблемы логики и методологии науки. Новосибирск, 1982. С. 42-57.

лишь эвристический потенциал идеи Гильберта рассматривать теории в качестве строго формализованных объектов.

В «Основаниях геометрии» Гильбертом осуществляется формальная аксиоматика, когда «абстрагируются от конкретного содержания понятий, входящих в систему аксиом, и от природы предметной области. В основу формальной аксиоматики кладётся система аксиом, затем из этих аксиом получают следствия, которые образуют теорию относительно любой системы объектов, удовлетворяющей положенным в основу аксиомам»*. Становится необходимым доказательство непротиворечивости формальной аксиоматики. Известно, что до Гильберта основным средством такого доказательства был метод моделей, который позволял непротиворечивость одной теории свести к непротиворечивости другой. Всё же, дабы избежать «дурной бесконечности», для какой-либо теории доказательство непротиворечивости должно быть осуществлено непосредственно, путём указания системы объектов, удовлетворяющей формальной системе аксиом, что возможно (путём перебора) лишь в случае конечной предметной области, с бесконечными же предметными областями это невозможно. Гильбертом было предложено доказывать непротиворечивость в отрицательном смысле: «для заданной системы аксиом A показать, что, *исходя из неё и пользуясь средствами логического вывода, нельзя будет получить никакого противоречия*, т.е. что *никогда не смогут оказаться доказуемыми две формулы, одна из которых является отрицанием другой*»**. Такие доказательства осуществляются с помощью формализованной аксиоматики, представляющей, согласно программе Гильберта, формальную аксиоматическую систему, непротиворечивость которой и доказывается, в виде исчисления, т.е. «трансформировав правила логики в правила оперирования символами, в правила исчисления»***.

Таким образом, аксиоматически построенной теории сопоставляется конструктивный объект особого рода – исчисление. «Исчисление, взятое само по себе, не является системой знания, процессы оперирования формулами – логическими процессами. Но поскольку исчисление имеет своей задачей отобразить систему знания, а правила исчисления – логику, то пользуются параллельной терминологией. Так, говорят о доказуемых и выводимых формулах исчисления. Но здесь речь идёт не о доказуемости или

* Смирнов В.А. Указ. соч. С. 266.

** Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1982. С. 40.

*** Смирнов В.А. Указ. соч. С. 267.

выводимости в собственно логическом смысле, а о том, может ли данная формула быть получена из таких-то и таких-то формул по определённым правилам»*.

В современной литературе идущее от Гильберта синтаксическое понимание теории (T теории) как замкнутого относительно выводимости** множества предложений:

$$T =_{Df} \forall A (T \vdash A \Rightarrow A \in \mathrm{T}),$$

принадлежит А. Тарскому. Такое определение является точным, если фиксирован синтаксис языка, на котором формулируется каждое предложение (A) теории, и дано понятие выводимости ($\vdash$), т.е. задана логика (логическая теория***– L-теория) – множество всех логически доказуемых (выводимых из пустого множества или общезначимых) предложений:

$$\mathrm{L} =_{Df} \forall A (\vdash A \Rightarrow A \in \mathrm{L}),$$

причём логическая теория обычно строится также аксиоматически, в виде так называемых гильбертовских исчислений****: задаётся достаточное множество аксиом и правил вывода, посредством которых можно получить в качестве теорем множество всех доказуемых в этой логике предложений. Решается вопрос (доказываются метатеоремы) о свойствах (имеющихся или нет) конкретной логической системы: если все теоремы являются общезначимыми – система *корректна*, корректность определяет *непротиворечивость* системы, если система позволяет доказать все общезначимые предложения – *она полна*, корректность и полнота определяют *адекватность* системы. Эти важнейшие для логической теории свойства могут быть проанализированы в полной мере лишь с привлечением интерпретации, адекватной модели. Помня о решающей роли интерпретации мы всё же останемся на чисто синтаксическом уровне, который и продемонстрирует эвристическую роль формализованных логических теорий в появлении и развитии неклассических логик.

---

* Там же.

** Существуют и другие лаконичные формулировки теории, например, посредством оператора замыкания относительно следствия.

*** Логическую теорию называют также минимальной теорией, отличая её от прикладных теорий, которые кроме теорем логики содержат теоремы, описывающие конкретную предметную область. На базе одной минимальной теории (например, классической логики предикатов) могут строиться различные прикладные теории.

**** Другие способы формулировки логических систем, т.е. натуральные исчисления, секвенциальные исчисления, аналитические таблицы, широко представлены в современных исследованиях, играют важную роль, также обладают (порой существенно отличающейся) эвристической функцией, но вопрос взаимной эквивалентности различных формулировок всегда ставится.

Конечно же, в современной науке эвристическую ценность сохранили и формальные, и содержательные варианты аксиоматического построения теорий, и далеко не только в пределах логической проблематики. Например, в физике XX в., исходя из постулата о постоянстве скорости света и принципа относительности, А. Эйнштейн делает достоверными утверждения — «парадокс близнецов» и «парадокс времени» — настолько странные, что они, по словам одного из участников жарких споров вокруг выводов теории относительности, «при различных мнениях представляются либо как скандал, либо как чудо»*. А согласно сформулированной Н. Бором квантовой теории, электрон в атоме испускает излучение исключительно при переходе с одной «орбиты» на другую, что не менее скандально, т.к. в корне противоречит устоявшимся положениям классической электродинамики.

Однако произошедшая в XX в. деуниверсализация классической логики, когда возникли альтернативные концепции выводимости, носит всё же самый фундаментальный характер, т.к. осознание того, что в основу теории могут быть положены различные, конкурирующие между собой логики, радикальным образом опроблематизировало сами основы построения теоретического знания, и, в конечном счёте — понятие рациональности.

III

Появление неклассических логик в начале XX в.: «воображаемая логика» Н.А. Васильева**, многозначные логики Я. Лукасевича***, идея интуиционистской логики у Л.Э.Я. Брауэра**** и др., но особенно последовавшая со временем стремительная пролиферация логических систем, создали совершенно уникальную ситуацию в современном логическом знании. Веками, с самого возникновения теоретической логики, не снимающиеся вопросы «Что есть логика?», «Каков предмет и метод логики?», «Какие философские задачи ставит и решает логика?» приобрели невероятную

* История и методология естественных наук. М., 1960, Вып. I. С. 43.

** Васильев Н.А. Воображаемая логика. Казань; Общество Народных Университетов, тип. Гран. 1911. 6 с. См. также: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989 (Апелляция к «воображаемой геометрии» Лобочевского у казанского логика была прямой).

*** Łukasiewicz J. O logice trójwartościowey // Ruch Filozoficzny. 1920. T. 5. S. 170-171. (Английский перевод: Łukasiewicz J. On three-valued logic \\ Łukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P. 87-88).

**** О творчестве Л.Э.Я. Брауэра см.: Панов М.И. Можно ли считать Л.Э.Я. Брауэра основателем конструктивистской философии математики? // Методологический анализ математических теорий. Сборник научных трудов. М., 1987. С. 77-119.

остроту и сложность своего рассмотрения, не столько даже в специально-техническом, сколько в социально-культурном плане.

Мы поставили перед собой скромную задачу, продемонстрировать, не претендуя на полноту рассмотрения вопроса, как на формализованном уровне аксиоматизации пропозициональных логик конструируются различные логические системы.

Известно, что при аксиоматизации теории, прежде всего, решаются:

Во-первых, ***проблема синтаксиса языка теории***, выбора исходных знаков, правила формирования новых (производных) знаков;

Во-вторых, ***проблема логических средств вывода***, т.е. множества аксиом и правил вывода.

Решая проблему синтаксиса, будем для краткости использовать нотацию формы Бакуса-Наура (**БНФ** – Backus-Naur form), когда «выделяются определённые синтаксические категории, затем с помощью рекурсивных равенств показывается, как порождаются элементы таких категорий»*. Например синтаксис стандартной классической пропозициональной логики (CL) имеет одну синтаксическую категорию – формулы (Φ_{CL}), они порождаются с помощью базового множества атомарных формул ($\Phi_{CL\text{-}0}$), здесь – пропозиций, и пропозициональных связок, выбирается любой полный функциональный набор таких связок, например: $<\neg, \to>$. Таким образом, **БНФ** для **CL** приобретает следующий вид:

Атомарные формулы: $p \in \Phi_{-0}$

Формулы: $A_n \in \Phi$

$An ::= p \mid \neg A_1 \mid A_1 \to A_2$

Здесь представлено формально рекурсивное равенство, регулирующее недетерминистическую предписывающую процедуру порождения формул: любое вхождение в формулу символа, находящегося слева от знака ::=, может быть замещено любым из альтернативных выражений, разделённых вертикальной чертой, находящихся справа.

Следующие определения логических терминов имеют характер сокращения формул:

$D_f.\ f^{**} =_{Df} \neg(A_1 \to A_1)$;

$D_\vee.\ A_1 \vee A_2 =_{Df} \neg A_1 \to A_2$;

$D_\wedge.\ A_1 \wedge A_2 =_{Df} \neg(A_1 \to \neg A_2)$;

$D_\leftrightarrow.\ A_1 \leftrightarrow A_2 =_{Df} (A_1 \to A_2) \wedge (A_2 \to A_1)$ и др.

---

* Гольдблатт Р. Логика времени и вычислимости. М., 1992. С. 3.

** f – константа лжи.

Решая проблему средств вывода, сначала остановимся на известной системе схем аксиом **CL** (отредактированная Лукасевичем система Фреге):

A^*_1. $\boldsymbol{A_1 \to (A_2 \to A_1)}$;

A^*_2. $\boldsymbol{(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))}$;

A^*_3. $\boldsymbol{(\neg A_1 \to \neg A_2) \to (A_2 \to A_1)}$.

Правило вывода: (MP) $\boldsymbol{A_1, (A_1 \to A_2) \vdash A_2}$.

Важно ввести понятие эквиполлентных систем логики*, т.е. различных по синтаксису или множеству аксиом и правил вывода систем, но задающих одну и ту же теорию, одно и то же множество доказуемых предложений. Так, например, **CL** можно задать несколько иначе**: определить

$\boldsymbol{A_n ::= p \mid \mathrm{f} \mid A_1 \to A_2}$,

а схему аксиом A^*_3 заменить на

A^*_4. $\boldsymbol{((A_1 \to \mathrm{f}) \to \mathrm{f}) \to A_1}$,

отрицание же определить следующим образом:

$D'_{\neg}$. $\boldsymbol{\neg A_1 =_{Df} A_1 \to \mathrm{f}}$.

Существует множество активно используемых в логической литературе эквиполлентных систем **CL**, нет смысла делать их обзор, потому мы приведём ещё лишь одну полезную нам в дальнейшем систему, где в схемах аксиом охарактеризованы основные пропозициональные связки **CL**:

$\boldsymbol{A_n ::= p \mid \neg A_1 \mid A_1 \wedge A_2 \mid A_1 \vee A_2 \mid A_1 \to A_2}$.

A_1. $\boldsymbol{A_1 \to A_1}$;

A_2. $\boldsymbol{(A_1 \to A_2) \to ((A_2 \to A_3) \to (A_1 \to A_3))}$;

A_3. $\boldsymbol{(A_1 \wedge A_2) \to A_1}$;

A_4. $\boldsymbol{(A_1 \wedge A_2) \to A_2}$;

A_5. $\boldsymbol{(A_1 \to A_2) \to ((A_1 \to A_3) \to (A_1 \to (A_2 \wedge A_3)))}$;

A_6. $\boldsymbol{A_1 \to (A_1 \vee A_2)}$;

A_7. $\boldsymbol{A_2 \to (A_1 \vee A_2)}$;

A_8. $\boldsymbol{(A_1 \to A_2) \to ((A_3 \to A_2) \to ((A_1 \vee A_3) \to A_2))}$;

A_9. $\boldsymbol{(A_1 \to A_2) \to ((A_1 \to \neg A_2) \to \neg A_1)}$;

A_{10}. $\boldsymbol{\neg A_1 \vee A_1}$.

Правило вывода: **MP*****.

CL хорошо изучена, адекватна многочисленным своим интерпретациям и послужит нам своеобразным отправным пунктом дальнейшего конструирования логических систем. Содержательные, даже практические интенции

---

* См.: Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М., 1948. С. 179.

** Предлагается P1 из: Чёрч А. Введение в математическую логику. М., 1960. С. 65.

*** Далее будем оговаривать правила вывода только в тех системах, где имеет место отличие от CL.

построения новых логических систем могут быть самыми различными, но в плане формализации хорошо просматривается следующая иерархия главных направлений пролиферации — в смысле новообразования неэквиполлентных систем логики:

1. *не меняя язык** **CL**, *изменять систему аксиом и правил вывода*;
2. *изменять язык* **CL**, *а вследствие этого и систему аксиом и правил вывода.*

Примеры для (1):

*Интуиционистская логика***:

Известно, что интуиционистская логика (**I**) отказывается от закона исключённого третьего. Если просто ограничится перечисленными для **CL** схемами аксиом A_1 — A_9, отбросив A_{10}, мы получим некоторую систему $\mathbf{I}_m$ — более слабую, чем интуиционистская логика***. Добавив к $\mathbf{I}_m$ следующие аксиомы, каждая из которых соответствует теореме **CL**:

A_{11}. $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to (A_2 \to (A_1 \to A_3))$;

A_{12}. $(A_1 \to (A_1 \to A_2)) \to (A_1 \to A_2)$;

A_{13}. $A_1 \to (A_2 \to A_1)$ (совпадающую с A^*_1);

A_{14}. $\neg A_1 \to (A_1 \to A_2)$;

получим полную систему **I******. Отношения между **CL** и **I** весьма интересны. С одной стороны, не все теоремы **CL** являются теоремами **I**, т.е. отбросив одну из аксиом, мы ослабили **CL**. Однако В. Гливенко в 1929 г. были доказаны***** следующие положения, погружающие классическую логику в интуиционистскую:

если $\mathbf{CL} \vdash A_n$, *то* $\mathbf{I} \vdash \neg\neg A_n$;

если $\mathbf{CL} \vdash \neg A_n$, *то* $\mathbf{I} \vdash \neg A_n$.

Причём следует учесть, что этот результат был получен до построения удовлетворительной интерпретации интуиционистской логики.

---

* Безусловно, пропозициональные связки в новых системах могут существенно отличаться по своей интерпретации, и потому — не всегда сохраняются их взаимоопределения, приведённые выше. Однако, рассматривая эвристический потенциал формализованных систем логики, целесообразно сохранять сквозную символику, наблюдая динамику трансформации единой БНФ-конструкции.

** Гейтинг А. Интуиционизм. М., 1965; Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., 1977.

*** Гливенко В. О логике Брауэра // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998. С. 15-18.

**** Гливенко В. О некоторых аспектах логики Брауэра // Там же. С. 19-23.

***** Там же.

Многозначные логики Лукасевича:

История исследований многозначных логик* начинается с работ Я. Лукасевича. Идею трёхзначной логики $Ł_3$ Лукасевич выразил матричным способом, а аксиоматизировал её ученик Лукасевича М. Вайсберг, для этого понадобились только:

A^*_1, A^*_3, A_2 и

$A_{15}.\ ((A_1 \to \neg A_1) \to A_1) \to A_1$.

Последняя аксиома также соответствует теореме **CL**.

Интересным является то, что первичной задачей для Лукасевича было построение логической теории модальных предложений. Определения операторов «возможности» (M) и «необходимости» (N) в рамках языка $Ł_3$ были предложены А. Тарским:

$D_M.\ \mathbf{M}A_1 =_{Df} \neg A_1 \to A_1$;

$D_N.\ \mathbf{N}A_1 =_{Df} \neg \mathbf{M} \neg A_1$.

В качестве теорий модальностей многозначные логики (трёх- и четырёхзначные логики Лукасевича) оказались неудовлетворительными, из-за многих «парадоксальных» с интуитивной точки зрения теорем, но они стали представлять самостоятельный интерес для современных логических исследований. Воспроизвёлся своеобразный «эффект Колумба», т.к. теории конечнозначных и бесконечнозначных логик строились уже без их отчётливой модальной интерпретации.

Примеры для (2):

Позитивные логики:

Алфавит языка логики может быть сокращён. В связи с тем, что основную содержательную нагрузку в различии, например, систем классической и интуиционистской логик несут аксиомы с отрицанием, естественным оказалось рассмотрение частичных логических систем**, язык которых не имеет средств выражения отрицания, т.е. позитивных логик. Они являются средством анализа общих для различных логик свойств. Таковой будет импликативная система с языком

$A_n ::= p \mid A_1 \to A_2$,

содержащая только аксиомы A^*_1 и A^*_2.

---

* Подробно см.: Карпенко А.С. Многозначные логики. Логика и компьютер. Вып. 4. М., 1997.

** Чёрч А. Введение в математическую логику. С. 134.

Конструктивные логики с сильным отрицанием:

Алфавит языка логики может быть пополнен. Так А.А. Марковым было построено логико-арифметическое исчисление с «сильным» отрицанием* (~), пропозициональный фрагмент которого** назван $\mathbf{П}^+$. Строится он следующим образом:

$$A_n ::= p \mid {\sim}A_1 \mid \neg A_1 \mid A_1 \wedge A_2 \mid A_1 \vee A_2 \mid A_1 \to A_2,$$

а к аксиомам интуиционистского исчисления **I** добавляются аксиомы, характеризующие «сильное» отрицание:

A^+_1. ${\sim}A_1 \to (A_1 \to A_2)$;

A^+_2. ${\sim}(A_1 \to A_2) \leftrightarrow (A_1 \wedge {\sim}A_2)$;

A^+_3. ${\sim}(A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow ({\sim}A_1 \vee {\sim}A_2)$;

A^+_4. ${\sim}(A_1 \vee A_2) \leftrightarrow ({\sim}A_1 \wedge {\sim}A_2)$;

A^+_5. ${\sim}A_1 \leftrightarrow A_1$;

A^+_6. ${\sim}{\sim}A_1 \leftrightarrow A_1$.

Если принять определение:

$D^2_{\neg}$. $\neg A_1 =_{Df} A_1 \to {\sim}A_1$,

то можно построить некую систему с «сильным» отрицанием путём добавления A^+_1 – A^+_6 уже к позитивной логике, где формулы определяются, например, так:

$$A_n ::= p \mid {\sim}A_1 \mid A_1 \to A_2.$$

Модальные логики:

Наиболее известный и активно изучаемый пример логик с обогащённым алфавитом представляет класс модальных систем***, начавшийся с исследований К.И. Льюиса. Симптоматично само начало логико-модальных исследований, также окрашенное «эффектом Колумба»: построение модальной логики спровоцировано стремлением решить проблему логического следования (исключить парадоксы материальной импликации) путем построения теории строгой импликации, однако неудачное решение данной конкретной проблемы оказалось началом широкого исследования целого нового семейства родственных логических систем со сходной формальной структурой. Язык обогащается модальными операторами: «необходимости» (□) и «возможности» (◊). Например, как это делается в так называемой

* Марков А.А. Конструктивная логика // Успехи математических наук. Т. 5. М., 1950. С. 187 – 188.

** Воробьёв Н.Н. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием // Доклады Академии Наук СССР. Т. LXXXV, №3. М., 1952.

*** См., например: Фейс Р. Модальная логика. М., 1974; Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981.

гёделевской аксиоматизации модальных систем:

$$A_n ::= p \,|\, \neg A_1 \,|\, A_1 \to A_2 \,|\, \Box A_1,$$

а «возможность» определяется через «необходимость:

$$D_\Diamond.\ \Diamond A_1 =_{Df} \neg\Box\neg A_1.$$

Система аксиом «надстраивается» над **CL** добавлением аксиом, характеризующих модальные операторы. Вот некоторые из них:

K. $\Box(A_1 \to A_2) \to (\Box A_1 \to \Box A_2)$;

T. $\Box A_1 \to A_1$;

D. $\Box A_1 \to \Diamond A_1$;

S_4. $\Box A_1 \to \Box\Box A_1$;

B. $A_1 \to \Box\Diamond A_1$.

Правила вывода: **MP** и «правило Гёделя»* – $A_1 \vdash \Box A_1$.

Широко известны следующие модальные логики:

$\mathbf{T} = \mathbf{CL}$ + K, T;

$\mathbf{S_4} = \mathbf{CL}$ + K, T, S_4;

$\mathbf{S_5} = \mathbf{CL}$ + K, T, S_4, B.

Интерпретации модальных систем отличаются большим разнообразием: алетические, деонтические, эпистемические, временные и мн. др. логики. В язык логики могут вводится неопределяемые друг через друга модальные операторы, что порождает класс мультимодальных логик.

Многомерные логики:

В языке логики могут подлежать изменению не только понятие формулы, но и понятие базового множества. Например, существует возможность введения нескольких автономных множеств атомарных формул, как это делается в многомерных логиках, идею которых выдвинул Н.А. Васильев, а разработка этой идеи принадлежит В.А. Смирнову**. Приведём пример конструирования двумерной логики с автономными положительными и отрицательными предложениями***:

Атомарные формулы: $p \in \mathbf{\Phi}_{0\text{-pos}}$ и $\text{-}p$**** $\in \mathbf{\Phi}_{0\text{-neg}}$

---

* Аксиома К и «правило Гёделя» характерны для так называемых «нормальных» систем модальной логики.

** См., напр.: Смирнов В.А. Многомерные логики // Логические исследования. Вып. 2., М., 1993. С. 259 – 278. Многомерные логики следует отличать от многозначных логик.

*** Философские основания подобных логических систем мы рассматривали в: Кислов А.Г. Онтологически автономные суждения: Кант, Васильев и неклассическая логика // В поисках новой онтологии. Екатеринбург, 2004. С. 244 – 257.

**** Следует заметить, что знак «-» не является пропозициональной (или какой-нибудь другой) связкой, это просто индекс отрицательных суждений.

Формулы: $A_n \in \Phi$

$A_n ::= p \mid -p \mid \neg A_1 \mid A_1 \to A_2$

Здесь следует различать:

Φ_{-pos} – формулы, содержащие только атомарные утвердительные выражения, например: $\neg p \to q$;

- Φ_{-neg} – формулы, содержащие только атомарные отрицательные выражения, например: $\neg -p \to -q$;

- Φ_{-mix} – формулы, содержащие как атомарные утвердительные выражения, так и атомарные отрицательные выражения, например: $\neg p \to -q$.

Естественно, что $\Phi_{pos} \cup \Phi_{-neg} \cup \Phi_{-mix} = \Phi$.

Система аксиом подбирается под предполагаемый тип логической системы, но существенную роль будет играть принятие или отбрасывание аксиом «сопряжения» атомарных выражений:

A_1. $-p \to \neg p$;

A_2. $p \to -p$.

Обратим внимание на существенное отличие структуры языка такой двухмерной логики от рассмотренной выше логики с «сильным» отрицанием, хотя представляет интерес их детальное сравнение.

<u>Комбинированные логики</u>:

Атомарные выражения могут быть и разносортные, что порождает различие синтаксических категорий. Так строятся комбинированные логики, идея которых восходит и к Н.А. Васильеву, и к Г. Фреге, и даже ещё к более раннему различению логики классов и логики высказываний. Современный вариант идеи комбинированных исчислений представил В.А. Смирнов*. Приведём пример конструирования комбинированной логики **CM** с внутренней логикой событий (алгеброй де Моргана):

Атомарные события: $x \in C_0$

События (термы): $X_n \in C$

$X_n ::= x \mid X_1' \mid X_1 \cap X_2 \mid X_1 \cup X_2$,

где <$'$, $\cap$, $\cup$> – термообразующие функторы, соответствующие операциям алгебры классов.

---

* Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987. С.211–221; Он же. Утверждение и предикация. Комбинированные исчисления высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С.27-35; Он же. Комбинирование исчислений предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С.16-29.

Формулы: $A_n \in \Phi$

$A_n ::= \theta X_1 | \neg A_1 | A_1 \wedge A_2 | A_1 \vee A_2 | A_1 \to A_2$,

где — знак утверждения события, т.е. оператор, обращающий событие (терм) в высказывание (формулу).

К схемам аксиом **CL** добавляются:

$A^{CM}{}_1$. $\theta(A_1 \cap A_2) \leftrightarrow (\theta A_1 \wedge \theta A_2)$;

$A^{CM}{}_2$. $\theta(A_1 \cup A_2) \leftrightarrow (\theta A_1 \vee \theta A_2)$;

$A^{CM}{}_3$. $\theta(A_1 \cap A_2)' \leftrightarrow (\theta A_1' \vee \theta A_2')$;

$A^{CM}{}_4$. $\theta(A_1 \cup A_2)' \leftrightarrow (\theta A_1' \wedge \theta A_2')$.

Динамические логики:

Завершим обзор примеров пропозициональной динамической логикой[46] (**PDL**), язык которой сочетает в себе многие рассмотренные выше характеристики: это комбинированная мультимодальная логика, модальности которой индексированы формальными программами.

Атомарные программы (термы): $p \in \Pi_0$

Атомарные формулы: $p \in \Phi_0$

Программы: $\alpha_n \in \Pi$

$\alpha_n ::= p | \alpha_1^* | \alpha_1 ; \alpha_2 | \alpha_1 \cup \alpha_2 | A_1?$,

где <*, ;, ∪> — термообразующие функторы, соответствующие операциям над программи: итерация, последовательное выполнение, альтернативное выполнение — соответственно, а **?** — знак программы «тестирования» состояния.

Формулы: $A_n \in \Phi$

$A_n ::= p | \neg A_1 | A_1 \to A_2 | [\alpha_1] A_1$,

где **[ ]** — динамическая модальность ($[\alpha_1]A_1$ — читается как «после выполнения программы α_1 необходимо A_1»).

Следующие схемы аксиом и правила вывода формулируют полную и непротиворечивую систему **PDL**: к схемам аксиом **CL** добавляются

K^D. $[\alpha_1](A_1 \to A_2) \to ([\alpha_1]A_1 \to [\alpha_1]A_2)$;

Comp. $[\alpha_1 ; \alpha_2]A_1 \leftrightarrow [\alpha_1][\alpha_2]A_1$;

Union. $[\alpha_1 \cup \alpha_2]A_1 \leftrightarrow [\alpha_1]A_1 \wedge [\alpha_2]A_1$;

Test. $[A_1?]A_2 \leftrightarrow (A_1 \to A_2)$;

Mix. $[\alpha_1^*]A_1 \leftrightarrow A_1 \wedge [\alpha_1][\alpha_1^*]A_1$;

Ind. $[\alpha_1^*](A_1 \to [\alpha_1]A_1) \to (A_1 \to [\alpha_1^*]A_1)$.

---

* Fischer. M.J., and Ladner R.F. Propositional dynamic logic of regular programs, J. Comp. Syst. Sci., 1979, 18. P. 194 – 211.

Правила вывода: **MP** и динамический вариант «правила Гёделя»: $A_1 \vdash [\alpha_1]A_1$.

Таким образом, **PDL** демонстрирует возможности конструирования своего рода синтетических систем, пролиферирующих сразу по нескольким направлениям.

* * *

Как видим, аксиоматическое построение логических систем само по себе, даже без обязательности удовлетворительной интерпретации, содержит возможность новообразования различных логических систем, обогащая язык логики и предлагая альтернативные версии идеи логического следования. На формализованном уровне изучения логических систем появляются новые теоретические объекты: разбиение на классы сформулированных средствами одного языка эквиполлентных систем и анализ множества всех таких классов, ряды трансформаций таких языков и др.

Появление множества систематически развиваемых версий формализованных систем типа «logica specialis» существенно изменило представление о некой «logica pura», возможность строгой формулировки которой оценивается в современной литературе отчётливо негативно*, что, впрочем, вовсе не лишает её философского статуса общей регулятивной идеи в подлинно кантовском смысле, наряду с такими идеями как личность, мир и Бог. Идея Логики извечно сама несёт своё становление.

---

*См., напр.: Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 49 – 50.